ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

QUÁCH NGỌC TOẢN

HỌ CHUẨN TẮC ĐỀU VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

QUÁCH NGỌC TOẢN

HỌ CHUẨN TẮC ĐỀU VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - 2015

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của **PGS.TS Phạm Việt Đức.**

Trong khi nghiên cứu luận văn, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học và đồng nghiệp với sự trân trọng và biết ơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014

Tác giả

QUÁCH NGỌC TOẢN

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung của luận văn, tôi xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên, nơi mà tôi đã hoàn thành chương trình cao học dưới sự giảng dạy nhiệt tình và tâm huyết của các Thầy, Cô.

Đặc biệt, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **PGS.TS Phạm Việt Đức**, người Thầy đã trực tiếp hướng dẫn, chỉ bảo tận tình và giúp đỡ để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè những người đã giúp đỡ và chia sẻ với tôi trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014

Tác giả

QUÁCH NGỌC TOẢN

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN   http://www.lrc.tnu.edu.vn

MỤC LỤC

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

MỞ ĐẦU

Vào những năm 60 của thế kỉ XX, Kobayashi là nhà hình học người Nhật đã xây dựng lý thuyết các không gian phức hyperbolic. Trong thời gian gần đây lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi đã nghiên cứu về sự thác triển các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức và thu được các kết quả quan trọng. Năm 1995 J.Joseph và M.Kwack đã đưa ra một phương pháp mới, chỉ dựa vào các tính chất tôpô của các không gian hàm để chứng minh và tổng quát hoá các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi, từ đó đưa ra một số đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Trong các năm 1996, 1997 J.Joseph và M.Kwack cũng đã công bố các kết quả nghiên cứu về họ các ánh xạ chuẩn tắc đều trên đa tạp hyperbolic và trên không gian phức bất kỳ. Các nghiên cứu này đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của lý thuyết các không gian phức hyperbolic và mở ra những hướng nghiên cứu mới.

Trong luận văn này chúng tôi trình bày một số ứng dụng của họ chuẩn tắc đều trong việc mở rộng các định lý của Brody, Lohwater và Pommerenke, Hahn, Hayman giải tích phức.

Bố cục của luận văn được chia thành hai chương

Chương I: Một số kiến thức chuẩn bị

Nội dung của chương này là trình bày một số kiến thức cơ bản của Giải tích phức hyperbolic, hàm chuẩn tắc và họ chuẩn tắc đều, hàm độ dài và khoảng cách sinh bởi hàm độ dài trên các không gian phức, ánh xạ chỉnh hình vào các không gian hyperbolic. Những kiến thức này sẽ là cơ sở cho việc nghiên cứu ở các chương sau.

Chương II: Họ chuẩn tắc đều và ứng dụng

Là nội dung chính của luận văn. Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu một số tính chất quan trọng của họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình trên các đa tạp hyperbolic. Những kết quả này có ý nghĩa quan trọng trong việc tổng quát hóa một số định lý cổ điển của Brody Lohwater và Pommerenke, Lehto và Virtanen, Hahn, Zaidenberg. Cuối chương, giới thiệu các khái niệm và một số kết quả về các ánh xạ chuẩn tắc và họ chuẩn tắc đều của các ánh xạ chỉnh hình của nhiều tác giả.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Một số định lý trong giải tích phức

Với X, Y là các không gian phức, kí hiệu $H(X,Y)\big(C(X,Y)\big)$ là không gian các ánh xạ chỉnh hình (liên tục) từ X vào Y. Ta sẽ sử dụng $H(X)\big(C(X)\big)$ thay cho $H(X,\mathbb{C})\big(C(X,\mathbb{C})\big)$. Tất cả các không gian hàm được trang bị tôpô compact mở. Hình cầu Riemann sẽ biểu thị bởi $P^1(\mathbb{C})$.

1.1.1. Định lý. *(Định lý thác triển Riemann)*

Một hàm chỉnh hình bị chặn f xác định trên đĩa thủng $D^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ đều thác triển thành hàm chỉnh hình $\tilde{f}$ xác định trên đĩa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1.1.2. Định lý. *(Định lý Liouville).*

Một hàm nguyên bị chặn là một hàm hằng.

1.1.3. Định lý. *(Bổ đề Hurwitz).*

Cho U là một miền trong $\mathbb{C}$ và cho $\{f_k\}$ là một dãy trong $H\big(U, P^1(\mathbb{C}) - \{a\}\big)$ mà hội tụ tới $f \in H\big(U, P^1(\mathbb{C})\big)$. Khi đó hoặc f là hằng hoặc $f \in H\big(U, P^1(\mathbb{C}) - \{a\}\big)$.

1.1.4. Định nghĩa. Một họ các hàm chỉnh hình F xác định trên một miền $U \subset \mathbb{C}$ được gọi là chuẩn tắc nếu mỗi dãy trong F hoặc chứa một dãy con hội tụ trong $H(U)$ hoặc dần đến ∞.

Bổ đề Hurwitz chứng tỏ rằng tính chuẩn tắc của một họ $F \subset H(U)$ là tương đương với tính compact tương đối của một họ nếu xem họ đó là một tập con của $H\big(U, P^1(\mathbb{C})\big)$.

1.1.5. Định nghĩa. Cho X, Y là các không gian tô pô. Một họ $F \subset C(X,Y)$ được gọi là liên tục đồng đều từ $p \in X$ tới $q \in Y$ nếu mỗi tập mở U trong Y quanh q, tồn tại các tập mở V,W trong X, Y quanh p,q tương ứng sao cho:

$$\{f \in F : f(p) \in W\} \subset \{f \in F : f(V) \subset U\}.$$

Nếu F là liên tục đồng đều từ mỗi $p \in X$ tới mỗi $q \in Y$ ta nói rằng F là liên tục đồng đều (từ X tới Y). Ta có định lý Ascoli-Arzelà sau:

1.1.6. Định lý. *Cho X là một không gian compact địa phương chính quy và cho Y là một không gian chính quy. Khi đó $F \subset C(X,Y)$ là compact tương đối trong $C(X,Y)$ khi và chỉ khi:*

(a) *F là liên tục đồng đều*

(b) *$F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ là compact tương đối trong Y với mỗi $x \in X$.*

1.1.7. Định lý. *Cho (Y,σ) là không gian metric compact địa phương. Cho X là không gian tô pô và ρ là một giả metric trên X mà liên tục trên $X \times X$. Nếu $F \subset C(X,Y)$ là Lipschitz ứng với ρ và σ, thì F là compact tương đối trong $C(X,Y^\infty)$, trong đó Y^∞ là compact hóa 1 điểm của Y.*

1.1.8. Định lý. *(Định lý Montel).*

Một họ bị chặn địa phương F các hàm chỉnh hình xác định trên miền $U \subset \mathbb{C}$ là compact tương đối trong $H(U)$.

1.2. Metric Poincaré và một số kết quả liên quan

Nhóm các tự đẳng cấu $A(D)$ của đĩa D được cho bởi

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, a \in D.$$

Khoảng cách hyperbolic d_D và metric Poincaré

$$\rho = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

là bất biến dưới $A(D)$ và thỏa mãn:

$$d_D(z,\omega) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho$$

trong đó γ là đường cong nối z và ω. Tiếp theo bổ đề Schwarz-Pick sau đây chứng tỏ rằng $H(D,D)$ là giảm khoảng cách đối với khoảng cách hyperbolic.

1.2.1. Định lý. *(Bổ đề Schwarz-Pick [22]).*

Với mỗi $f \in H(D,D)$, ta có:

$$\frac{|f(z)-f(\omega)|}{\left|1-\overline{f(z)}f(\omega)\right|} < \frac{|z-\omega|}{|1-\bar{z}\omega|};\ z,\omega \in \mathrm{D}$$

và

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} < \frac{1}{1-|z|^2};\ z \in \mathrm{D}$$

trừ khi nó là một tự đẳng cấu.

1.2.2. Định lý. *(Định lý Montel [5]).*

Cho M là một miền trong $\mathbb{C}$. Khi đó họ $H(M,\mathbb{C}-\{0,1\})$ là một họ chuẩn tắc, tức là nó là compact tương đối trong $H(M,P^1(\mathbb{C}))$.

1.2.3. Định lý. *(Định lý Picard bé [5]).*

Mỗi hàm $f \in H(\mathbb{C},\mathbb{C}-\{0,1\})$ là hàm hằng.

1.2.4. Định lý. *(Định lý Picard lớn [5]).*

Mỗi ánh xạ $f \in H(\mathrm{D}^*,\mathbb{C}-\{0,1\})$ đều thác triển được thành $\tilde{f} \in H(D,P^1(\mathbb{C}))$.